UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CRT-614

SUR L'AGRÉGATION DES MESURES DE LA PRODUCTION*

par

Robert Gagné

* Nous tenons à remercier vivement Charles Vanasse pour son support professionnel de grande qualité et Georges Dionne pour ses commentaires judicieux. Cette étude a pu être réalisée grâce au soutien financier du Fonds F.C.A.R. et de Transports Canada.

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #614

Janvier 1989

Dépôt légal - 1er trimestre 1989

RESUME

Cette étude remet en question l'emploi d'une seule mesure agrégée de la production pour l'estimation des fonctions de coût d'entreprises dont la technologie engendre la production de plusieurs biens ou services. Cette remise en question s'opère par le développement d'un nouveau test d'agrégation. Un nouveau test s'avère nécessaire puisque les tests connus, développés dans le but d'établir l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production (intrants), sont inadéquats pour déterminer l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production.

Mots-clés: technologie, agrégats cohérents, fonctions de coût, mesures de la production.

ABSTRACT

This paper develops a new method for the determination of consistent output aggregates. The development of a new method was necessary because existent ones, mainly developed for the determination of consistent input aggregates, are inadequate in the case of outputs. The relative performance of the new method is evaluated with several randomly generated samples.

Keywords: technology, consistent aggregates, cost functions, output measures.

INTRODUCTION

En 1937, Wassily Leontief écrivait: «On a si souvent réduit l'intérêt prêté aux problèmes méthodologiques à un signe de frustration théorique que ce sujet a pratiquement disparu du domaine de la discussion économique»[1]. Fort heureusement, l'intérêt porté par les économistes aux problèmes méthodologiques s'est considérablement accru depuis cette époque. L'importance de la méthodologie ne fait, aujourd'hui, aucun doute. Cette dernière agit à titre de pont entre d'une part la recherche théorique et, d'autre part, la recherche empirique. De ce fait, les lacunes et limites des modèles théoriques sont souvent le fait des lacunes et limites des méthodologies mises en place pour tester ces modèles. Dans ce contexte, il est primordial de développer des méthodologies générant des résultats influencés que par les observations empiriques et les concepts théoriques.

Les économistes intéressés à la théorie de la firme ou à l'organisation industrielle ont longtemps considéré la technologie des entreprises en des termes relativement simples. Dans la plupart des cas, la technologie était représentée soit par une fonction de production Cobb-Douglas, soit par une fonction Leontief ou une fonction C.E.S.. Bien que la simplicité de ces fonctions soit un avantage certain, celles-ci limitent considérablement le potentiel des analyses puisqu'elles

---

[1] Extrait d'un article paru dans The Quarterly Journal of Economics 51(26), février 1937, intitulé: «Implicit Theorizing: A Methodological Criticism of the Neo-Cambridge School». Traduction française tirée de: Essais d'économique, Calmann-Lévy, 1974, p. 67.

supposent implicitement plusieurs hypothèses sur la nature de la technologie. Par exemple, certaines de ces fonctions n'admettent qu'un seul produit, supposent des rendements d'échelle constants ou des élasticités de substitution constantes entre les facteurs. Cependant, depuis une quinzaine d'années, la recherche active dans ce secteur important de la science économique a contribué à mettre au point des fonctions qui arrivent à caractériser la technologie des entreprises en des termes très généraux. Cette recherche a ses origines dans les travaux de Christensen, Jorgensen et Lau (1973) portant sur l'approximation translogarithmique des fonctions de production ou de coût[1]. Cette caractérisation de la technologie a été appliquée à bon nombre de domaines. En particulier, et pour répondre à la demande importante d'études scientifiques portant sur la déréglementation, celle-ci a été largement utilisée dans le domaine du transport, particulièrement le transport par camion[2].

La plupart des études empiriques réalisées jusqu'à maintenant à l'aide de cette méthodologie suppose que la technologie employée par les entreprises engendre la production d'un seul bien ou service. Dans certains cas, la mesure unique de production employée est corrigée par des qualités ou caractéristiques technologiques de la production (Spady et Friedlaender (1978)). Pourtant, bon nombre d'entreprises, particulièrement les entreprises de transport, produisent une multitude de biens ou

---

[1] L'une étant duale à l'autre.

[2] Voir, entre autres, Spady et Friedlaender (1978, 1981), Friedlaender et Wang Chiang (1983), Kim (1984), Friedlaender et Schur Bruce (1985), Daughety, Nelson et Vigdor (1985) et Daughety et Nelson (1988). Gagné (1988) présente une revue de cette méthodologie.

services. L'utilisation d'une mesure unique de la production, corrigée ou non, suppose implicitement l'existence d'un agrégat cohérent des diverses mesures de la production. Or, la méthodologie actuelle ne permet pas de supposer que l'emploi d'une seule mesure de la production donnera des résultats non biaisés concernant la structure de la technologie et des coûts. Autrement dit, rien n'assure la cohérence de l'agrégation au plan fonctionnel. De plus, cette méthodologie ne permet pas de présumer de l'existence même d'un agrégat cohérent des mesures de la production.

Cette étude s'intéresse au problème que soulève l'agrégation des mesures de la production. En fait, dans ce texte, nous remettons en question l'emploi d'une seule mesure agrégée de la production pour l'estimation de fonctions de coût d'entreprises où la technologie engendre la production de plusieurs biens ou services. Cette remise en question s'opère par le développement d'un test d'agrégation des mesures de la production. Le développement d'un nouveau test s'avère nécessaire puisque, comme nous le verrons, les tests connus, développés dans le but d'établir l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production, sont inadéquats pour déterminer l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production. Ainsi, à la section suivante (1), nous présentons les concepts de séparabilité et d'agrégation cohérente. A la section 2, nous présentons les tests d'agrégation connus (inspirés de la littérature sur l'agrégation des facteurs de production) et montrons pourquoi ces derniers sont inadéquats pour déterminer l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production. La section 3 présente

un nouveau test d'agrégation des mesures de la production. Ce test est ensuite l'objet d'une évaluation statistique réalisée à partir d'un nombre important d'échantillons générés aléatoirement (section 4). Enfin, une conclusion est présentée à la section 5.

1. AGREGATION ET SEPARABILITE: PRESENTATION

L'utilisation de mesures agrégées de la production suppose au préalable la séparabilité de la fonction de production dans ces agrégats. Ainsi, considérons la fonction de production suivante:

$$f(y,x) \leq 0, \qquad (1.1)$$

où y est un vecteur (Kx1) de mesures de production (extrants);

x est un vecteur (Mx1) d'intrants;

f est une fonction satisfaisant les conditions de régularité connues[1].

Pour définir la séparabilité, posons d'abord N, une partition formée des éléments du vecteur y. Une partition N de y est donnée par $I_1, \ldots, I_n, \ldots I_N$ avec $I_1 \cup I_2 \ldots \cup I_N = y$ et $I_n \cap I_t = \emptyset$ pour $n \neq t$. Munis de cette définition, nous pouvons d'ores et déjà introduire la notion de séparabilité. Ainsi, la fonction f(y,x) est dite <u>faiblement séparable</u> par rapport à la partition N si et seulement si (Leontief (1947a, 1947b), Sono (1961), Green (1964), Goldman et Uzawa (1964), Berndt et Christensen (1973)):

$$\frac{d(f_k/f_r)}{dy_i} = 0, \ \forall\, k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n,\ n = 1, \ldots, N \qquad (1.2)$$

et $$\frac{d(f_k/f_r)}{dx_m} = 0, \ \forall\, k,r \in I_n,\ n = 1, \ldots, N \text{ et } \forall\, m,$$

où $f_k = \dfrac{df(y,x)}{dy_k}$ et $f_r = \dfrac{df(y,x)}{dy_r}$.

---

[1] Voir Diewert (1982), McFadden (1978) ou Lau (1978).

La fonction f(y,x) est par conséquent faiblement séparable par rapport aux sous-ensembles I_n (n = 1, ..., N) lorsque le taux marginal de transformation (TMT) entre chaque paire d'extrants appartenant à I_n est indépendant des quantités d'extrants n'appartenant pas à I_n et des quantités d'intrants. Dans ce cas, la fonction de production peut s'écrire sous la forme:

$$f(y,x) \equiv F\,(g_1(I_1),\ ..,\ g_n(I_n),\ ....,\ g_N(I_N),x) \leq 0$$

$$\equiv F\,(Y_1,\ ....,\ Y_N,\ x) \leq 0, \qquad (1.3)$$

où $g_1, .., g_N$ représentent les N fonctions d'agrégation;

$Y_1, .., Y_N$ sont les agrégats formés à partir des éléments des sous-ensembles $I_1, .., I_n, .., I_N$.

Sous l'hypothèse que les conditions 1.2 sont vérifiées, un agrégat «cohérent» des éléments du sous-ensemble I_n de la partition N existe pour la fonction f(y,x). Ce dernier correspond à $g_n(I_n)$.

Par ailleurs, la fonction f(y,x) est dite <u>fortement séparable</u> par rapport à la partition N si et seulement si:

$$\frac{d(f_k/f_r)}{dy_i} = 0,\ \forall\ k\in I_n,\ r\in I_t \text{ et } i\notin I_n \cup I_t,\ n,t = 1, ..., N \qquad (1.4)$$

et $$\frac{d(f_k/f_r)}{dx_m} = 0,\ \forall\ k\in I_n,\ r\in I_t \text{ et } \forall\, m\ .$$

La fonction f(x,y) est par conséquent fortement séparable par rapport à la partition N lorsque le TMT entre chaque paire d'extrants appartenant à I_n ou I_t est indépendant des quantités d'extrants

n'appartenant pas à I_n et I_t et des quantités d'intrants. La forte séparabilité de f(y,x) nous permet d'écrire celle-ci sous la forme:

$$f(y,x) \equiv \bar{F}(l_1(I_1) + l_n(I_n) + \ldots + l_N(I_N),\ x) \leq 0 \qquad (1.5)$$

où $l_1, \ldots, l_N$ sont des fonctions d'agrégations des éléments des sous-ensembles $I_1, \ldots, I_N$.

Les relations 1.2 et 1.4 définissent, au plan fonctionnel, les conditions de séparabilité de la fonction de production 1.1 et, partant de là, permettent d'établir l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production. L'étape suivante consiste à utiliser ces résultats pour guider le développement d'un test d'agrégation des mesures de la production.

2. TEST D'AGREGATION CLASSIQUE

Au cours des dernières années, les travaux concernant les tests d'agrégation (ou de séparabilité) ont surtout porté sur le développement de méthodologies cherchant à démontrer l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production (Berndt et Christensen (1974), Denny et Fuss (1977), Blackorby, Schworm et Fisher (1987)). L'extension de ces méthodologies à des tests d'agrégation des mesures de la production est, peut-on lire dans certains de ces textes, évidente.

La procédure classique consiste d'abord à définir la fonction de coût correspondant à la fonction de production 1.1, soit[1]:

$$c(y,w) \equiv \min_{x} \left[w'x : f(y,x) \leq 0 \right] \qquad (2.1)$$

où w est un vecteur (Mx1) de prix des intrants.

Dans un deuxième temps, on cherche à déterminer la fonction de coût correspondant à la fonction $F(Y_1, \ldots, Y_N, x)$. Pour ce faire, on pose le problème de la même manière que précédemment, soit:

$$C(Y_1, \ldots, Y_N, w) \equiv \min_{x} \left[w'x : F(Y_1, \ldots, Y_N, x) \leq 0 \right] . \qquad (2.2)$$

$c(y,w)$ étant duale à $f(y,x)$ et $C(Y_1, \ldots, Y_N, w)$ à $F(Y_1, \ldots, Y_N, x)$, on peut donc établir la structure de séparabilité de $f(y,x)$ à partir de la fonction de coût[2]. En fait, pour déterminer si les $y_n (n=1, \ldots, N)$

---

[1] Voir Gagné (1988), section 2, pour une discussion de la fonction de coût.

[2] En effet, si les $Y_n (n=1, \ldots, N)$ constituent des agrégats cohérents des mesures de la production alors $f(y,x) \equiv F(Y_1, \ldots, Y_N, x)$, si bien que: $c(y,w) \equiv \min_{x} [w'x : f(y,x) \leq 0] \equiv \min_{x} [w'x : F(Y_1, \ldots, Y_N) \leq 0] \equiv$

constituent des agrégats cohérents des mesures de la production, on applique les conditions de faible séparabilité 1.2 à c(y,w) soit:

$$\frac{d(c_k/c_r)}{dy_i} = 0, \forall k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n,\ n=1, \ldots, N \qquad (2.3)$$

et $$\frac{d(c_k/c_r)}{dw_m} = 0, \forall k,r \in I_n,\ n=1, \ldots, N \text{ et } \forall m,$$

où $c_k = \frac{dc(y,w)}{dy_k}$ et $c_r = \frac{dc(y,w)}{dy_r}$ sont, respectivement, les fonctions de coût marginal par rapport à y_k et y_r. Sous ces conditions, $C(Y_1, \ldots, Y_N, w) \equiv c(y,w)$ et, par conséquent, $F(Y_1, \ldots, Y_N, x) \equiv f(y,x)$.

Les conditions 2.3 se récrivent:

$$\frac{c_{ki}c_r - c_{ri}c_k}{c_r^2} = 0 \quad \forall k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n,\ n=1, \ldots, N \qquad (2.4)$$

et $$\frac{c_{km}c_r - c_{rm}c_k}{c_r^2} = 0, \quad \forall k,r \in I_n,\ n=1, \ldots, N \text{ et } \forall m,$$

où $c_{ki} = \frac{d(c_k)}{dy_i}$, $c_{ri} = \frac{d(c_r)}{dy_i}$

$c_{km} = \frac{d(c_k)}{dw_m}$, $c_{rm} = \frac{d(c_r)}{dw_m}$.

$C(Y_1, \ldots, Y_N, w)$. Par ailleurs, contrairement aux facteurs de production (intrants), où la présence de prix relatifs constants justifie à elle seule l'emploi de mesures agrégées des prix de ces facteurs à l'intérieur de la fonction de coût (théorème de séparabilité de Hicks), la séparabilité fonctionnelle de la fonction de coût est ici une condition nécessaire à l'emploi de mesures agrégées de la production à l'intérieur de celle-ci.

Or, comme $c_r^2 > 0$, alors les conditions de faible séparabilité de c(y,w) et, partant de là, de f(y,x) s'écrivent[1] :

$$\frac{c_{ki}}{c_{ri}} = \frac{c_k}{c_r}, \quad \forall\, k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n,\ n=1, \ldots, N \qquad (2.5)$$

et $$\frac{c_{km}}{c_{rm}} = \frac{c_k}{c_r}, \quad \forall\, k,r \in I_n,\ n=1, \ldots, N \text{ et } \forall m.$$

La vérification empirique des conditions 2.5 peut s'opérer en s'inspirant d'une méthode due à Denny et Fuss (1977), même si ces derniers cherchaient à démontrer l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production. En fait, Denny et Fuss cherchent à établir la structure d'agrégation des facteurs de production lorsque la forme fonctionnelle de la fonction de coût est une approximation translogarithmique d'ordre deux du même type que celle utilisée dans les analyses de la structure de la technologie citée précédemment.

Posons d'abord $c^a(y,w,a)$, une approximation au moins deux fois continûment différentiable de c(y,w) assurant globalement les

---

[1] Les conditions de faible séparabilité de la fonction de coût par rapport aux prix des intrants peuvent s'écrire en des termes analogues. Berndt et Christensen (1973) ont montré que ces mêmes conditions pouvaient également s'écrire en termes des élasticités de substitution. Evidemment, le concept d'élasticités de substitution étant propre aux intrants, il n'existe pas de conditions équivalentes à 2.5 en termes de ces élasticités.

propriétés de celle-ci tout en étant flexible[1], a représentant le vecteur des paramètres à estimer. $c^*(y,w,a)$ s'écrit $c^*(y,w,\hat{a})$ une fois estimée par une méthode économétrique appropriée. Prenant les dérivées partielles de $c^*(y,w,\hat{a})$ par rapport à $y_k (k = 1, \ldots, K)$, on obtient des approximations des fonctions de coût marginal, sous l'hypothèse que le comportement des dérivées d'une fonction puisse être inféré de manière adéquate à partir des dérivées de l'approximation. Ainsi, on a que:

$$\hat{c}_k = \frac{dc^*(y,w,\hat{a})}{dy_k} \quad , \; k = 1, \ldots, K. \tag{2.6}$$

où $\hat{c}_k$ représente une approximation de la fonction de coût marginal par rapport à y_k.

De la même manière, on a que:

$$\hat{c}_{ki} = \frac{d^2c^*(y,w,\hat{a})}{dy_k \, dy_i} \quad , \quad k,i = 1, \ldots, K \tag{2.7}$$

et $$\hat{c}_{km} = \frac{d^2c^*(y,w,\hat{a})}{dy_k \, dw_m} \quad , \quad \begin{matrix} k = 1, \ldots, K \\ m = 1, \ldots, M \end{matrix} .$$

L'estimation économétrique de $c^*(y,w,a)$ permet par conséquent la vérification des conditions de faible séparabilité 2.5 et, partant de là, permet de déterminer l'existence d'agrégats cohérents des mesures de

---

[1] Une approximation est dite flexible lorsqu'elle contient un nombre suffisant de paramètres libres pour que la valeur de la fonction et les valeurs de ses dérivées premières et secondes soient quelconques au point d'approximation (Diewert (1971, 1973)). Barnett (1983) a montré que cette définition de la flexibilité était équivalente à la définition mathématique d'une approximation locale de second-ordre. Diewert et Wales (1987) ont montré que l'approximation translogarithmique était flexible, bien que cette dernière n'assure pas la concavité.

la production. Ainsi, en termes de l'approximation $c^z(y,w,\hat{a})$, ces conditions s'écrivent:

$$\frac{\hat{c}_{ki}}{\hat{c}_{ri}} = \frac{\hat{c}_k}{\hat{c}_r} \quad , \quad \forall\, k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n,\ n = 1, \ldots, N \qquad (2.8)$$

et $$\frac{\hat{c}_{km}}{\hat{c}_{rm}} = \frac{\hat{c}_k}{\hat{c}_r} \quad , \quad \forall\, k,r \in I_n,\ n=1, \ldots, N \text{ et } \forall m.$$

Le test ci-dessus repose sur l'hypothèse que le comportement des dérivées de l'approximation d'une fonction est un prédicteur adéquat du comportement des dérivées de celle-ci. Or, selon White (1980) et Coleman (1985), bien qu'une approximation puisse être adéquate pour évaluer le niveau d'une fonction, rien n'assure que les dérivées de cette approximation soient aussi adéquates pour décrire le comportement des dérivées de cette même fonction.

Pour inférer de manière adéquate le comportement des dérivées de la fonction de coût, on peut, à partir d'une approximation de celle-ci, procéder directement à l'estimation d'approximations des dérivées. Par exemple, si l'objectif est de déterminer l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production, on doit approximer les dérivées de la fonction de coût par rapport aux prix des facteurs. Ainsi, prenant les dérivées de $c^z(y,w,a)$ par rapport w_m ($m = 1, \ldots, M$), on obtient des

approximations des dérivées de la fonction de coût par rapport aux prix des facteurs, celles-ci respectant les propriétés de $c(y,w)$ si $c^*(y,w,a)$ respecte ces propriétés. Ces dérivées correspondent, par le lemme de Shephard (1953), aux fonctions de demande de facteurs, soit:

$$x_m(y,w) = \frac{dc^*(y,w,a)}{dw_m} \quad , \; m = 1, \ldots, M \; . \tag{2.9}$$

L'estimation conjointe des équations 2.9 est possible et permet la vérification des conditions de séparabilité de Leontief-Sono. Selon Coleman (1985), cette procédure donnera de meilleures approximations des dérivées de la fonction que celles obtenues des dérivées de l'approximation $c^*(y,w,\hat{a})$.

Cette procédure peut difficilement être utilisée dans le cadre d'un test d'agrégation des mesures de la production. Celle-ci exige en effet que les niveaux des dérivées de la fonction de coût (dans ce cas-ci, les coûts marginaux) soient connus. Or, semblables données sont rarement disponibles ou même observables à moins de faire certaines hypothèses sur la structure de l'industrie dans laquelle les firmes évoluent.

Par ailleurs, si la fonction $c^*(y,w,a)$ est spécifiée de telle sorte qu'elle contient tout juste assez de paramètres libres pour être considérée comme flexible, alors les formes fonctionnelles utilisées en guise d'approximations des fonctions $dc(y,w)/dy_k$ $(k = 1, \ldots, K)$ et $dc(y,w)/dw_m$ $(m = 1, \ldots, M)$ soit $dc^*(y,w,a)/dy_k$ et $dc^*(y,w,a)/dw_m$ ne

peuvent être flexibles[1]. Par conséquent, $dc^s(y,w,a)/dy_k$ et $dc^s(y,w,a)/dw_m$ ne peuvent être considérées comme des approximations locales de second-ordre des fonctions $dc(y,w)/dy_k$ et $dc(y,w)/dw_m$.

A la section suivante, nous développons un test d'agrégation des mesures de la production fondé sur l'emploi, en guise d'approximations des fonctions de coût marginal, de formes fonctionnelles flexibles. De plus, de manière à disposer d'observations sur les niveaux des coûts marginaux, nous considérons deux situations de marché différentes: la concurrence et le monopole.

---

[1] En général, les formes fonctionnelles utilisées en guise d'approximations contiennent tout juste assez de paramètres libres pour être considérées comme flexibles. Les paramètres supplémentaires n'ajoutent rien en terme de flexibilité et augmentent le risque de multi-collinéarité.

3. UN NOUVEAU TEST D'AGREGATION DES MESURES DE LA PRODUCTION

3.1 Présentation

Posons $h^s_{kr}(y,w)$, une approximation au moins une fois continûment différentiable de la fonction $\frac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}$ assurant globalement les propriétés de celle-ci tout en étant flexible[1]. Etant donné les conditions de faible séparabilité 2.3, la fonction $c(y,w)$ peut s'écrire $C(Y_1, \ldots, Y_N, w)$ lorsque:

$$\frac{dh^s_{kr}(y,w)}{dy_i} = 0 \ , \ \forall\, k,r \in I_n \text{ et } i \notin I_n, \ n = 1, \ldots, N \qquad (3.1)$$

et $$\frac{dh^s_{kr}(y,w)}{dw_m} = 0 \ , \ \forall\, k,r \in I_n, \ n = 1, \ldots, N \text{ et } \forall\, m \ .$$

Le test d'agrégation revient donc à déterminer empiriquement si le rapport entre deux fonctions de coût marginal, approximé par $h^s_{kr}(y,w)$, dépend ou non de variables n'appartenant pas au sous-ensemble des variables formant l'agrégat désiré. Il nous faut donc procéder à l'estimation des fonctions $h^s_{kr}(y,w)$ ces dernières, rappelons-le, satisfaisant les propriétés de la fonction de coût, puis vérifier si elles respectent les conditions 3.1.

---

[1] En particulier, $c(y,w)$ étant homogène de degré un par rapport à w, $dc(y,w)/dy_k$ et $dc(y,w)/dy_r$ sont aussi homogènes de degré un par rapport à w si bien que $\frac{dc(y,w)/dy_k}{d(y,w)/dy_r}$ est homogène de degré zéro par rapport à w.
Aussi, $c(y,w)$ étant non décroissante en y_k $(k = 1, \ldots, K)$, $h^s_{kr}(y,w)$ doit être non négative.

Ce dernier test est différent de celui proposé par Denny et Fuss (1977) puisqu'il considère l'approximation du rapport de deux dérivées de la fonction de coût plutôt que le rapport entre deux dérivées d'une approximation de la fonction de coût. De plus, l'approximation employée est flexible.

Pour procéder à l'estimation des fonctions $h^s_{kr}(y,w)$, il nous faut disposer d'observations sur les niveaux des coûts marginaux de la firme à l'équilibre. Toutefois, comme nous l'avons déjà mentionné, de telles données ne sont pas disponibles, à moins de faire des hypothèses particulières sur la nature des marchés dans lesquels les firmes évoluent.

3.2 Test d'agrégation en concurrence parfaite

En supposant que les firmes évoluent dans des conditions de concurrence parfaite, l'utilisation du test précédent est possible si l'on observe les prix des différents extrants y_k. En fait la concurrence parfaite permet de supposer que les firmes opèrent de manière à ce que le coût marginal de l'extrant k(k=1, ..., K) soit égal au prix de ce dernier (p_k). Dans ces conditions, l'observation des prix des extrants revient à observer les coûts marginaux de ces mêmes extrants.

Pour réaliser le test d'agrégation, il suffit d'estimer les équations:

$$\frac{p_k}{p_r} = h^s_{kr}(y,w) + e_{kr}, \quad k,r=1, \ldots, K, \quad (k<r,\ k\neq r) \qquad (3.2)$$

où e_{kr} est un terme d'erreur aléatoire (dû aux erreurs d'optimisation et d'approximation) de moyenne nulle et de variance finie, puis de vérifier si ces dernières respectent les conditions 3.1.

3.3 Test d'agrégation en situation de monopole

Supposons que la firme détienne le monopole du marché k. Celle-ci est confrontée à la fonction de demande:

$$y_k = D_k(p_k, u), \tag{3.3}$$

où u est un vecteur de variables, autre que p_k et exogènes à la firme, affectant la quantité demandée de l'extrant k;

D_k est la fonction de demande de l'extrant k;

y_k et p_k sont définis comme précédemment.

Compte tenu de 3.3, le problème de maximisation des profits de la firme s'écrit:

$$\max_{y,x,p} \left[\sum_{k=1}^{K} p_k y_k - \sum_{m=1}^{M} w_m x_m : f(y,x) \leq 0,\ p_k = d_k(y_k,u) \right]$$

$$\equiv \max_{y,p} \left[\sum_{k=1}^{K} p_k y_k - c(y,w) : p_k = d_k(y_k,u) \right] \tag{3.4}$$

$$\equiv \max_{y} \left[\sum_{k=1}^{K} d_k(y_k,u) y_k - c(y,w) \right]$$

où $d_k(y_k,u)$ est la fonction inverse de demande;

$$c(y,w) \equiv \min_{x} \left[\sum_{m=1}^{M} w_m x_m \; : \; f(y,x) \leq 0 \right] \quad .$$

Sous l'hypothèse que les fonctions inverses de demande et la fonction de coût sont différentiables par rapport à y_k, les conditions de premier ordre du problème 3.4 impliquent les relations suivantes:

$$p_k + y_k \frac{d(d_k(y_k,u))}{dy_k} = \frac{dc(y,w)}{dy_k} \quad , \; k=1, \; \ldots, \; K, \tag{3.5}$$

qu'on peut récrire:

$$p_k = \mu_k(y_k,u) + \frac{dc(y,w)}{dy_k} \quad , \; k=1, \; \ldots, \; K, \tag{3.6}$$

où $\mu_k(y_k,u) = -y_k \dfrac{d(d_k(y_k,u))}{dy_k}$.

Autrement dit, le prix exigé par la firme sur le marché k est égal au coût marginal auquel est ajouté une marge définie par $\mu_k(y_k,u)$. De plus, s'il s'avère que $\mu_k(y_k,u) = 0$, alors on peut considérer que la firme évolue dans un environnement concurrentiel, du moins sur le marché k. Appelbaum (1975) et Appelbaum et Kohli (1979) montrent comment, à partir de l'estimation des équations 3.6, on peut tester les hypothèses de concurrence et de monopole au sein d'une industrie. Ils ne considèrent toutefois pas le caractère multi-produit des technologies employées.

Par ailleurs, sous l'hypothèse que la fonction de coût est différentiable par rapport aux prix des intrants, on peut associer aux

dérivées de la fonction de coût par rapport aux prix des intrants les fonctions de demande d'intrants (lemme de Shephard (1953)), soit:

$$x_m = \frac{dc(y,w)}{dw_m}, \quad m=1, \ldots, M . \tag{3.7}$$

Supposons maintenant $D^*_k(y_k,u)$ et $\mu^*_k(y_k,u)$, des approximations flexibles de $D_k(y_k,u)$ et $\mu_k(y_k,u)$ respectant les propriétés théoriques de celles-ci. Considérons aussi $dc^*(y,w)/dy_k$ et $dc^*(y,w)/dw_m$ des approximations des fonctions $dc(y,w)/dy_k$ et $dc(y,w)/dw_m$. Dans un premier temps, en posant y_k, p_k et x_m comme endogènes, on peut par une méthode appropriée estimer conjointement les équations suivantes:

$$\begin{aligned} x_m &= dc^*(y,w)/dw_m + e_m, && m=1, \ldots, M, \\ p_k &= \mu^*_k(y_k,u) + dc^*(y,w)/dy_k + e_{pk}. && k=1, \ldots, K \\ \text{et} \quad y_k &= D^*_k(p_k,u) + e_{yk}, && k=1, \ldots, K, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où e_m, e_{pk} et e_{yk}, sont des termes d'erreurs aléatoires de moyenne nulle et de variance finie dues aux erreurs d'optimisation et d'approximation.

L'estimation du système 3.8 permet d'obtenir des évaluations empiriques des marges $\mu_k(y_k,u)$, soit $\hat{\mu}_k(y_k,u)$, k=1, ..., K et ce, pour chaque firme composant l'échantillon.

Les relations 3.6 impliquent les rapports suivants:

$$\frac{p_k-\mu_k(y_k,u)}{p_r-\mu_r(y_r,u)} = \frac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}, \quad k,r=1, \ldots, K. \tag{3.9}$$

Les p_k (k=1, ..., K) étant connus et les marges ayant été évaluées par $\hat{\mu}_k(y_k,u)$ à l'étape antérieure, il est par conséquent possible de procéder à l'estimation des équations suivantes:

$$\frac{p_k - \hat{\mu}_k(y_k, u)}{p_r - \hat{\mu}_r(y_r, u)} = h^s{}_{kr}(y,w) + e_{kr}, \quad \begin{matrix} k,r=1, \ldots, K, \\ (k<r,\ k\neq r) \end{matrix} \qquad (3.10)$$

où e_{kr} est un terme d'erreur aléatoire de moyenne nulle et de variance finie.

Les résultats de l'estimation du système 3.10 permettent la vérification des conditions 3.1 et, par conséquent, servent à déterminer l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production. En fait, si le système 3.10 satisfait aux conditions 3.1 alors la fonction de coût $c(y,w)$ peut s'écrire sous la forme $C(Y_1, \ldots, Y_N, w)$. De plus, par dualité, on sait que si la fonction de coût peut s'écrire sous la forme $C(Y_1, \ldots, Y_N, w)$ alors la fonction de production peut s'écrire $F(Y_1, \ldots, Y_N, x)$.

Nous tenons à faire remarquer que les conditions 2.3 ne peuvent être l'objet d'une vérification empirique à partir des résultats de l'estimation du système 3.8. Les résultats obtenus de 3.8 ne permettent que d'obtenir des approximations de $dc(y,w)/dy_k$ alors que les conditions 2.3 s'appliquent aux rapports $\dfrac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}$ $(k,r=1, \ldots, K)$. Pour cette raison, à la deuxième étape, nous procédons à l'estimation d'approximations des rapports entre deux fonctions de coût marginal, soit $h^s{}_{kr}(y,w)$, $k,r=1, \ldots, K$, $(k<r,\ k\neq r)$.

4. EVALUATION STATISTIQUE

Pour comparer la performance du test proposé relativement à celle du test existant (Denny et Fuss (1977)) et aussi pour en évaluer la pertinence, nous avons, à partir d'une spécification d'une fonction de coût possédant une structure d'agrégation donnée, réalisé diverses expériences sur des échantillons aléatoires indépendants. Dans un premier temps, nous avons procédé à l'évaluation des performances des dérivées de l'approximation et des approximations des dérivées en terme de leur capacité à prédire le comportement des dérivées d'une fonction. Par la suite, nous avons comparé la performance du test proposé à celle du test existant en terme du pouvoir de prédiction de la structure d'agrégation réelle de la fonction de coût. Enfin, nous avons évalué la pertinence d'estimer des approximations de la fonction de coût respectant la structure d'agrégation de celle-ci.

Considérons la fonction de coût suivante:

$$c(y,w) = ((a_{11}y_1+2a_{12}\sqrt{y_1y_2}+a_{22}y_2)\,(b_{11}w_1y_3+2b_{12}\sqrt{w_1w_2y_3}+b_{22}w_2y_3))^{\epsilon+1}, \tag{4.1}$$

où $c(y,w)$ représente le coût total de produire $y=(y_1,y_2,y_3)$ lorsque les prix des intrants sont $w=(w_1,w_2)$;

ϵ est un terme d'erreur aléatoire dû aux erreurs d'optimisation;

$a_{11} = 10$, $a_{12} = 20$, $a_{22} = 25$, $b_{11} = 15$, $b_{12} = 30$ et $b_{22} = 35$.

Les variables y_1, y_2, y_3 et w_1, w_2 ont été choisies indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Le terme d'erreur aléatoire a aussi été choisi indépendant et de loi $N[0,\sigma_\epsilon^2]$. Cent échantillons aléatoires indépendants issus de deux tirages différents ont

été générés pour réaliser les expériences. Chaque échantillon contient cent observations.

L'examen attentif de la fonction 4.1 permet de réaliser que celle-ci respecte les propriétés usuelles[1] d'une fonction de coût et aussi qu'elle admet un agrégat cohérent des produits y_1 et y_2. En d'autres termes, $c(y,w)$ peut s'écrire $\tilde{c}(g(y_1,y_2),y_3,w)$ avec

$$g(y_1,y_2) = a_{11}y_1 + 2a_{12}\sqrt{y_1y_2} + a_{22}y_2 \quad . \tag{4.2}$$

Par contre, la fonction $c(y,w)$ n'admet pas d'agrégats cohérents formés à partir de y_1, y_2 et y_3.

4.1 Dérivées de l'approximation vs approximations des dérivées

Afin d'évaluer la performance des approximations des dérivées relativement à celle des dérivées de l'approximation, nous avons comparé les variances des variables suivantes:

$$E_k^t = \frac{dc(y,w)}{dy_k}\Bigg|_{\substack{y=y^t\\w=w^t}} - \left[\frac{dc(y,w)}{dy_k}\right]^*\Bigg|_{\substack{y=y^t\\w=w^t}}, \quad k=1,2 \tag{4.3}$$

et $$\tilde{E}_k^t = \frac{dc(y,w)}{dy_k}\Bigg|_{\substack{y=y^t\\w=w^t}} - \frac{dc^*(y,w)}{dy_k}\Bigg|_{\substack{y=y^t\\w=w^t}}, \quad k=1,2 \quad ,$$

---

[1] Non-négativité, non-décroissance en y et w, homogène de degré un et concave en w, continue.

où $\left.\frac{dc(y,w)}{dy_k}\right|_{\substack{y=y^t \\ w=w^t}}$ représente la valeur de la dérivée de c(y,w) par rapport à y_k évaluée au point (y^t, w^t);

$\left[\frac{dc(y,w)}{dy_k}\right]^*$ représente la valeur calculée de $dc(y,w)/dy_k$ au point (y^t, w^t) obtenue à partir d'une approximation translogarithmique de celle-ci;

$\frac{dc^*(y,w)}{dy_k}$ représente la valeur calculée de $dc(y,w)/dy_k$ au point (y^t, w^t) obtenue à partir d'une approximation translogarithmique de $c(y,w)$[1];

t=1, ..., 100.

Ainsi E_k^t représente l'écart entre la valeur réelle de $dc(y,w)/dy_k$ évaluée au point (y^t, w^t) et la valeur obtenue d'une approximation de cette dernière évaluée au même point. $\tilde{E}_k^t$ représente l'écart entre la valeur de $dc(y,w)/dy_k$ évaluée au point (y^t, w^t) et la valeur obtenue en dérivant l'approximation de c(y,w), soit $c^*(y,w)$, évaluée également au point (y^t, w^t).

Le tableau 1 présente, pour chacun des deux tirages de cinquante échantillons effectués et pour différentes valeurs de σ_ϵ^2 le nombre de fois où l'hypothèse que Var $(E_k) <$ Var $(\tilde{E}_k)$ ne peut être

---

[1] Les formes translogarithmiques utilisées en guise d'approximations de c(y,w) et $dc(y,w)/dy_k$ sont présentées en annexe. $c^*(y,w)$ a été estimée par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). $[dc(y,w)/dy_k]^*$, k=1,2, ont été estimées conjointement par la méthode des moindres carrés généralisés itératifs.

rejetée par un test de Fisher[1]. A $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}00125$, $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}0125$ et $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}025$ correspond pour l'approximation $c^*(y,w)$ des $\bar{R}^2$ aux environs de 0,95, 0,70 et 0,50 respectivement.

Tableau 1

Nombre de fois sur 50 où $Var(E_k) < Var(\tilde{E}_k)$

	1er tirage		2ième tirage	
σ_ε^2	$\frac{dc(y,w)}{dy_1}$	$\frac{dc(y,w)}{dy_2}$	$\frac{dc(y,w)}{dy_1}$	$\frac{dc(y,w)}{dy_2}$
0,00125	40	43	39	42
0,0125	46	49	44	46
0,025	46	49	47	48

Les résultats obtenus tranchent nettement en faveur de la supériorité des approximations de dérivées sur les dérivées de l'approximation, du moins en ce qui concerne la qualité de l'ajustement de ces dernières. Il apparaît donc que les approximatiaons de dérivées semblent des prédicteurs plus adéquats des dérivées d'une fonction que les dérivées obtenues d'une approximation de cette même fonction.

---

[1] On ne peut rejeter l'hypothèse que $Var(E_k) < Var(\tilde{E}_k)$ lorsque le rapport entre les variances empiriques de E_k et $\tilde{E}_k$ est plus petit que la valeur critique d'une $F_{n_1-1,\ n_2-1}$, n_1 et n_2 étant le nombre d'observations entrant dans le calcul de $Var(E_k)$ et $Var(\tilde{E}_k)$ respectivement. Comme ici $n_1=n_2=100$, la valeur critique d'une $F_{99,99}$ à un niveau de confiance de 5 % est 0,717.

Ce résultat est susceptible d'influencer la performance du test fondé sur l'utilisation des dérivées de l'approximation (Denny et Fuss (1977)) relativement au test que nous proposons. Ce dernier, rappelons-le, est fondé sur l'utilisation d'approximations du rapport de fonctions de coût marginal.

4.2 Performance des tests

Dans cette section, nous comparons la performance du test que nous proposons à la performance du test suggéré par Denny et Fuss (1977), ce dernier consistant, rappelons-le, à vérifier les conditions 2.8. Pour ce faire, nous avons considéré deux expériences différentes. Dans la première, nous avons compté le nombre de fois, pour chacun des tests, où les résultats nous amènent à ne pas rejeter l'existence d'un agrégat cohérent formé à partir de y_1 et y_2 et à rejeter l'existence d'un agrégat cohérent formé à partir de y_1, y_2 et y_3. Dans la seconde expérience, nous avons compté le nombre de fois, pour chacun des tests, où les résultats nous amènent à rejeter l'existence d'un agrégat cohérent formé à partir de y_1 et y_3.

En termes des paramètres de l'approximation translogarithmique $c^2(y,w)$ présentée en annexe, les conditions d'existence d'un agrégat cohérent formé à partir de y_1 et y_2 correspondant aux conditions 2.8 sont (au point $\bar{y},\bar{w}$)[1] :

---

[1] Voir Denny et Fuss (1977) pour une présentation de ces conditions et des conditions 4.5.

$$\frac{\hat{a}_{ki}}{\hat{a}_{ri}} = \frac{\hat{a}_k}{\hat{a}_r} \quad , \; k,r=1,2 \text{ et } i=3, \quad (k<r,\ k\neq r) \tag{4.4}$$

$$\frac{\hat{a}_{km}}{\hat{a}_{rm}} = \frac{\hat{a}_k}{\hat{a}_r} \quad , \; k,r=1,2 \text{ et } m=1,2 \; . \quad (k<r,\ k\neq r)$$

De la même manière, les conditions d'existence d'un agrégat formé à partir de y_1, y_2 et y_3 sont (au point $\bar{y},\bar{w}$):

$$\frac{\hat{a}_{km}}{\hat{a}_{rm}} = \frac{\hat{a}_k}{\hat{a}_r} \quad , \; k,r=1,2,3 \text{ et } m=1,2 \; . \quad (k<r,\ k\neq r) \tag{4.5}$$

Les conditions 4.4 et 4.5 sont des conditions locales d'existence d'un agrégat cohérent, c'est-à-dire qu'elles sont valables au voisinage du point d'approximation $(\bar{y},\bar{w})$.

Le test que nous proposons est fondé sur l'approximation du rapport de deux fonctions de coût marginal, soit $h^s{}_{kr}(y,w)$. Aux fins de notre expérience, nous avons utilisé une approximation translogarithmique du même type que celle employée précédemment. Celle-ci est présentée en annexe. En terme de cette approximation, les conditions locales d'existence d'un agrégat formé à partir de y_1 et y_2 sont (au point $\bar{y},\bar{w}$)[1]:

$$d_i^{kr} = 0 \quad , \; k,r = 1,2 \text{ et } i = 3 \; , \quad (k<r,k\neq r) \tag{4.6}$$

$$d_m^{kr} = 0 \quad , \; k,r = 1,2 \text{ et } m = 1,2 \; . \quad (k<r,k\neq r)$$

---

[1] Ces conditions, de même que les conditions 4.7, sont dérivées en annexe.

Par ailleurs, les conditions locales d'existence d'un agrégat formé à partir de y_1, y_2 et y_3 sont (au point $\bar{y}, \bar{w}$):

$$d_m^{kr} = 0 \quad , k,r = 1, \ldots,3 \text{ et } m = 1,2 \; . \qquad (4.7)$$
$$(k<r, k\neq r)$$

Au tableau 2, nous présentons le nombre de fois, pour chaque tirage et différentes valeurs de σ_ϵ^2, où les résultats de l'estimation $c^*(y,w)$ nous amènent à ne pas rejeter les conditions 4.4 et à rejeter les conditions 4.5. Egalement, nous présentons le nombre de fois où les résultats de l'estimation des approximations $h^*_{kr}(y,w)$ nous amènent à ne pas rejeter les conditions 4.6 et à rejeter les conditions 4.7. Les conditions ont été vérifiées par un test du rapport de vraisemblance à un niveau de confiance de 5 %[1].

Tableau 2

Nombre de fois où (y_1, y_2) n'est pas rejetée

et (y_1, y_2, y_3) est rejetée au point $(\bar{y}, \bar{w})$

	1er tirage		2ième tirage	
σ_ϵ^2	Denny et Fuss (1977)	Test proposé	Denny et Fuss (1977)	Test proposé
0,00125	2	49	1	50
0,0125	0	49	1	50
0,025	0	49	1	50

[1] Les approximations $c^*(y,w)$ et $h^*_{kr}(y,w)$ ont été estimées par la méthode des MCO.

Dans presque tous les cas, le test que nous proposons nous amène à rejeter la partition (y_1, y_2, y_3) et à ne pas rejeter la partition (y_1, y_2) c'est-à-dire que le test nous amène à conclure correctement quant à la structure d'agrégation réelle de la fonction c(y,w). Le test suggéré par Denny et Fuss (1977) quant à lui nous amène rarement à conclure adéquatement sur la structure d'agrégation de c(y,w).

De la même manière qu'au tableau 2, nous présentons au tableau 3 le nombre de fois où chacun des tests nous amène à rejeter l'existence d'un agrégat cohérent formé à partir de y_1 et y_3. Encore ici, les conditions appropriées ont été vérifiées à l'aide d'un test du rapport de vraisemblance effectué à un niveau de confiance de 5 %.

Tableau 3

Nombre de fois sur 50 où (y_1, y_3)

est rejetée au point $(\bar{y}, \bar{w})$

	1er tirage		2ième tirage	
σ_ϵ^2	Denny et Fuss (1977)	Test proposé	Denny et Fuss (1977)	Test proposé
0,00125	33	50	28	50
0,0125	7	50	7	50
0,025	5	50	5	50

Le test que nous proposons conclu adéquatement peu importe la valeur de σ_ϵ^2. Cependant, le test suggéré par Denny et Fuss (1977), bien

que présentant une performance nettement inférieure au test que nous proposons, semble donner de meilleurs résultats lorsque la variance des erreurs d'optimisation est petite, soit dans le cas où les $\bar{R}^2$ obtenus de l'estimation de $c^*(y,w,a)$ sont de l'ordre de 0,95. Ces résultats nous amènent à conclure à la supériorité du test que nous proposons sur le test suggéré par Denny et Fuss (1977), à tout le moins en terme de la capacité de ces derniers à prédire la structure d'agrégation réelle de la fonction de coût $c(y,w)$.

4.3 Pertinence de considérer la structure d'agrégation de $c(y,w)$

On peut se demander si le fait de négliger la structure d'agrégation d'une fonction de coût en employant, par exemple, qu'une seule mesure agrégée de la production peut affecter de manière significative les résultats concernant la structure de la technologie et la structure des coûts. En fait, il est possible que ces résultats, obtenus généralement de l'estimation d'une fonction de coût, soient insensibles à la forme d'agrégation employée. Dans ces conditions, la réalisation d'un test d'agrégation des mesures de la production est superflue.

Afin de déterminer la pertinence de réaliser un test d'agrégation, nous avons évalué dans quelle mesure différentes approximations de la fonction $c(y,w)$, possédant chacune une structure d'agrégation particulière, arrivent à prédire adéquatement la structure de la technologie sous-jacente à cette fonction. En plus de la structure non agrégée (y_1, y_2, y_3), les différentes structures que nous avons considérées sont:

$$Y = a_{11} y_1 + 2a_{12} \sqrt{y_1 y_2} + a_{22} y_2 \quad , \tag{4.8.1}$$

$$Z = y_1 + y_2 \quad , \tag{4.8.2}$$

$$X = y_1 + y_2 + y_3 \quad . \tag{4.8.3}$$

Pour chacune de ces structures, nous avons utilisé une approximation translogarithmique du même type que $c^s(y,w)$, soit:

$$c^s(Y, y_3, w) \quad , \tag{4.9.1}$$

$$c^s(Z, y_3, w) \quad , \tag{4.9.2}$$

$$c^s(X, w) \quad . \tag{4.9.3}$$

Aux fins de notre évaluation, nous avons considéré un aspect particulièrement important de toute analyse de la structure de la technologie, soit les rendements d'échelle. La mesure des rendements d'échelle que nous utilisons tient compte du caractère multi-produit de la technologie sous-jacente à c(y,w). Cette mesure, proposée par Baumol, Panzar et Willig (1982), est donnée par:

$$S(y,w) = 1 \Big/ \sum_{k=1}^{3} \frac{d\ln c(y,w)}{d\ln y_k} \quad . \tag{4.10}$$

S(y,w) est une mesure «théorique» des rendements d'échelle, c'est-à-dire les rendements d'échelle tels qu'évalués à partir de la fonction c(y,w). Les mesures correspondantes pour les différentes structures d'agrégation envisagées sont:

$$S_1^s(y,w) = 1 \Big/ \sum_{k=1}^{3} \frac{d\ln c^s(y,w)}{d\ln y_k} \quad , \tag{4.11.1}$$

$$S_2^*(y,w) = 1 \Big/ \left[\frac{d\ln c^*(Y,y_3,w)}{d\ln Y} + \frac{d\ln c^*(Y,y_3,w)}{d\ln y_3} \right], \qquad (4.11.2)$$

$$S_3^*(y,w) = 1 \Big/ \left[\frac{d\ln c^*(Z,y_3,w)}{d\ln Z} + \frac{d\ln c^*(Z,y_3,w)}{d\ln y_3} \right], \qquad (4.11.3)$$

$$S_4^*(y,w) = 1 \Big/ \left[\frac{d\ln c^*(X,w)}{d\ln X} \right] . \qquad (4.11.4)$$

La pertinence de tenir compte de la structure d'agrégation de $c(y,w)$ est évaluée par le nombre de fois, pour chacun des deux tirages de cinquante échantillons et pour différentes valeurs de σ_ε^2, où les approximations $c^*(y,w)$, $c^*(Y,y_3,w)$, $c^*(Z,y_3,w)$ et $c^*(X,w)$ admettent, au point d'approximation $(\bar{y},\bar{w})$, des rendements d'échelle de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$. Pour ce faire, nous avons procédé à l'estimation de ces approximations par la méthode des MCO puis les avons réestimées par la même méthode mais cette fois sous la contrainte que celles-ci admettent des rendements d'échelle de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$ au point $(\bar{y},\bar{w})$. Cette contrainte revient à ce que la somme des coefficients d'ordre un affectant les variables de mesures de la production soit égal à $1 / S(\bar{y},\bar{w})$.

Au Tableau 4, nous présentons le nombre de fois, pour chacune des structures d'agrégation considérées, où les résultats d'un test du rapport de vraisemblance effectué à un niveau de confiance de 5 % nous amènent à ne pas rejeter des rendements d'échelle de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$ au point $(\bar{y},\bar{w})$.

Tableau 4

Nombre de fois sur 50 où les rendements d'échelle sont de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$ au point $(\bar{y},\bar{w})$

	1er tirage				2ième tirage			
σ_ε^2	y_1, y_2, y_3	Y, y_3	Z, y_3	X	y_1, y_2, y_3	Y, y_3	Z, y_3	X
0,00125	49	48	32	3	46	46	39	5
0,0125	49	47	43	27	46	46	48	35
0,025	49	47	44	34	46	46	48	40

A l'examen de ce tableau, on remarque d'abord que peu importe la valeur de σ_ε^2, l'emploi de la structure désagrégée (y_1, y_2, y_3) nous amène à ne pas rejeter dans la grande majorité des cas des rendements d'échelle de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$ au point $(\bar{y},\bar{w})$. Ce résultat était tout à fait prévisible mais le plus important, c'est que l'on obtient grosso modo les mêmes résultats en employant la structure d'agrégation réelle de $c(y,w)$, soit l'agrégat Y formé de y_1 et y_2 et, de manière indépendante, y_3. Par ailleurs, en employant l'agrégat $Z = y_1 + y_2$ et y_3 on obtient, en général, une performance sensiblement inférieure relativement à la performance obtenue avec Y et y_3. Ce résultat nous laisse supposer qu'il semble préférable, dans la mesure du possible, de respecter la forme d'agrégation $(g(y_1, y_2))$ car l'agrégation linéaire peut mener à des conclusions erronnées dans certains cas[1]. Enfin, lorsque l'agrégat

[1] Il n'existe cependant pas de test ou de méthode pour connaître la forme de la fonction d'agrégation réelle $g(y_1, y_2)$.

$X=y_1+y_2+y_3$ est employée, par conséquent lorsque la structure d'agrégation de $c(y,w)$ n'est pas respectée, les résultats obtenus sont nettement moins bons, quoique très sensibles à la valeur de σ_ϵ^2. Ainsi, pour une petite valeur de σ_ϵ^2, les résultats nous amènent dans la grande majorité des cas à rejeter des rendements d'échelle de niveau $S(\bar{y},\bar{w})$ au point $(\bar{y},\bar{w})$. Paradoxalement, les résultats sont nettement meilleurs lorsque la valeur de σ_ϵ^2 s'accroît. Néanmoins, le non respect de la structure d'agrégation de $c(y,w)$ nous amène à conclure incorrectement dans bon nombre de cas, d'où la pertinence de connaître et de respecter la structure d'agrégation de $c(y,w)$ lors des analyses empiriques.

5. CONCLUSION

L'utilisation d'agrégats cohérents des mesures de la production lors de l'analyse de la structure de la technologie et des coûts des entreprises est une condition essentielle à l'obtention de résultats non biaisés. Le but de cette étude était de développer une méthodologie capable de déterminer l'existence de tels agrégats. Le développement d'une nouvelle méthodologie s'est avéré nécessaire puisque les méthodologies existantes, mises au point dans le but de déterminer l'existence d'agrégats cohérents des facteurs de production, sont inadéquates pour établir l'existence d'agrégats cohérents des mesures de la production. D'ailleurs, une évaluation statistique réalisée avec une centaine d'échantillons générés aléatoirement a permis d'illustrer la supériorité de la méthodologie proposée sur les méthodologies existantes. La méthodologie que nous proposons peut s'appliquer à deux situations de marché différentes: la concurrence et le monopole. Une avenue de recherche possible serait de considérer des situations où ni la concurrence, ni le monopole prévalent. Par ailleurs, cette méthodologie peut être appliquée à bon nombre d'industries où la technologie engendre la production de plusieurs biens ou services. Parmi celles-ci, signalons les télécommunications, les services d'électricité et les transports, en particulier le transport par camion et le transport aérien des passagers.

BIBLIOGRAPHIE

APPELBAUM, E. (1975) "Applications of Duality to Non-Competitive Markets", thèse de Ph.D., University of British Columbia.

APPELBAUM, E. et KOHLI, U.R. (1979) "Canada-United States trade: Tests for the Small-Open Economy Hypothesis", Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique 12(1), 1-14.

BARNETT, W.A. (1983) "New Indices of Money Supply and the Flexible Laurent Demand System", Journal of Business and Economic Statistics 1(1), 7-23.

BAUMOL, W.J., PANZAR, J.G. et WILLIG, R.D. (1982), Contestable Markets and the Theory of Industry Structure, Harcourt Brace Jovanovich Inc., New-York.

BERNDT, E.R. et CHRISTENSEN, L.R. (1973) "The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution, and Aggregation", Review of Economic Studies 40, 403-410.

BERNDT, E.R. et CHRISTENSEN, L.R. (1974) "Testing for the Existence of a Consistent Aggregate Index of Labor Inputs", American Economic Review 64, 391-404.

BLACKORBY, C., SCHWORM, W. et FISHER, T. (1987) "Testing for the Existence of Input Aggregates in an Economy Production Function", miméo, University of British Columbia.

CHRISTENSEN, L.R., JORGENSEN, D.W. et LAU, L.J. (1973) "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", Review of Economics and Statistics 55(1), 28-45.

COLEMAN, T.S. (1985) "Approximation and Flexible Functional Forms", Research paper no. 271, State University of New York at Stony Brook.

DAUGHETY, A.F. et NELSON, F.D. (1988), "An Econometric Analysis of Changes in the Cost and Production Structure of the Trucking Industry, 1953-1982", Review of Economics and Statistics 50(1), 67-75.

DAUGHETY, A.F., NELSON, F.D. et VIGDOR, W.R. (1985) "An Econometric Analysis of the Cost and Production Structure of the Trucking Industry", dans Analytical Studies in Transport Economics, A.F. Daughety, éditeur, Cambridge University Press, 65-95.

DENNY, M. et FUSS, M. (1977) "The Use of Approximation Analysis to Test for Separability and the Existence of Consistent Aggregates", American Economic Review 67(3), 404-418.

DIEWERT, W.E. (1971) "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function", Journal of Political Economy 76, 481-507.

DIEWERT, W.E. (1973) "Functional Forms for Profit and Transformation Functions, Journal of Economic Theory 6, 284-316.

DIEWERT, W.E. (1982) "Duality Approaches to Microeconomic Theory" dans Handbook of Mathematical Economics, Volume II, K.J. Arrow et M.D. Intriligator, éditeurs, North-Holland, 535-599.

DIEWERT, W.E. et WALES, T.J. (1987) "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", Econometrica 55(1), 43-68.

FRIEDLAENDER, A.F. et WANG CHIANG, S.J. (1983), "Productivity Growth in the Regulated Trucking Industry", dans Research in Transport Economics, Volume I, T.E. Keeler, éditeur, JAI Press, Inc., 149-184.

FRIEDLAENDER, A.F. et SCHUR BRUCE, S. (1985), "Augmentation Effects and Technical Changes in the Regulated Trucking Industry, 1974-1979", dans Analytical Studies in Transport Economics, A.F. Daughety, éditeur, Cambridge University Press, Cambridge, 29-63.

GAGNE, R. (1988), "Réglementation et technologie dans l'industrie du transport par camion: une présentation de la méthodologie", L'Actualité Economique 64(2), 287-310.

GOLDMAN, S.M. et UZAWA, H. (1964) "A Note on Separability in Demand Analysis", Econometrica 32(3), 387-398.

GREEN, H.A.J. (1964) Aggregation in Economic Analysis: An Introductory Survey, Princeton University Press, Princeton.

KIM, M. (1984), "The Beneficiaries of Trucking Regulation Revisited", Journal of Law and Economics 27(1), 227-241.

LAU, L.J. (1978) "Testing and Imposing Monotonicity, Convexity and Quasi-Convexity Constraints", dans Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, M. Fuss et D. McFadden, éditeurs, North-Holland.

LEONTIEF, W. (1947a) "A Note on the Interrelation of Subsets of Independent Variables of a Continuous Function with Continuous Derivatives", Bulletin of the American Mathematical Society 53(4), 343-350.

LEONTIEF, W. (1947b) "Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships", Econometrica 15, 361-373.

McFADDEN, D. (1978) "Cost, Revenue and Profit Functions", dans Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, Volume I, M. Fuss et D. McFadden, éditeurs, North-Holland.

SHEPHARD, S. (1953) Cost and Production Functions, Princeton University Press, Princeton.

SONO, M. (1961) "The Effect of Price Changes on the Demand and Supply of Separable Goods", International Economic Review 2(3), 239-271.

SPADY, R. et FRIEDLAENDER, A.F. (1981) Freight Transport Regulation, M.I.T. Press, Cambridge.

SPADY, R. et FRIEDLAENDER, A.F. (1978), "Hedonic Cost Functions for the Regulated Trucking Industry", Bell Journal of Economics 9(1), 159-179.

WHITE, H. (1980) "Using Least Squares to Approximate Unknown Regression Functions", International Economic Review 21(1), 149-170.

ANNEXE

Formes translogarithmiques des fonctions $dc(y,w)/dy_k$, $c(y,w)$

et $\dfrac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}$

---

a) Approximation translogarithmique de $dc(y,w)/dy_k$

$$\frac{d\ln c(y,w)}{d\ln y_k} \simeq \left[\frac{d\ln c(y,w)}{d\ln y_k}\right]^{*} = b_0^k + \sum_{i=1}^{3} b_i^k \ln(y_i/\bar{y}_i)$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} b_m^k \ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij}^k \ln(y_i/\bar{y}_i)\ln(y_j/\bar{y}_j)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} b_{ms}^k \ln(w_m/\bar{w}_m)\ln(w_s/\bar{w}_s)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{2} b_{im}^k \ln(y_i/\bar{y}_i)\ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ e_k \quad , \quad k=1,2 \quad , \qquad (A.1)$$

avec $\sum_{m=1}^{2} b_m^k = 0$,

$\sum_{m=1}^{2} b_{ms}^k = 0$, $s=1,2$,

$\sum_{m=1}^{2} b_{im}^k = 0$, $i=1, \ldots, 3$,

$b_{ij}^k = b_{ji}^k$ et $b_{ms}^k = b_{sm}^k$,

où e_k est un terme d'erreur aléatoire dû aux erreurs d'optimisation et d'approximation de moyenne nulle et de variance finie;

$\bar{y}_k$ et $\bar{w}_m$ représentent les moyennes échantillonnales de y_k et w_m respectivement.

Les approximations de dérivées de la fonction sont données

$$\text{par: } \left[\frac{dc(y,w)}{dy_k}\right]^* = \left[\frac{d\ln c(y,w)}{d\ln y_k} - \hat{e}_k\right] \frac{c(y,w)}{y_k} \quad . \qquad (A.2)$$

b) Approximation translogarithmique de c(y,w)

$$\ln c(y,w) \simeq \ln c^*(y,w) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k \ln(y_k/\bar{y}_k) + \sum_{m=1}^{2} a_m \ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} a_{kr} \ln(y_k/\bar{y}_k) \ln(y_r/\bar{y}_r)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} a_{ms} \ln(w_m/\bar{w}_m) \ln(w_s/\bar{w}_s)$$

$$+ \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{2} a_{km} \ln(y_k/\bar{y}_k) \ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ e_c \quad , \qquad (A.3)$$

avec $\sum_{m=1}^{2} a_m = 1$,

$\sum_{m=1}^{2} a_{ms} = 0$, $s=1,2$,

$\sum_{m=1}^{2} a_{km} = 0$, $k=1,\ldots,3$,

$a_{kr} = a_{rk}$ et $a_{ms} = a_{sm}$,

où e_c est un terme d'erreur aléatoire dû aux erreurs d'optimisation et d'approximation de moyenne nulle et de variance finie.

Les dérivées de l'approximation sont données par:

$$\frac{dc^s(y,w)}{dy_k} = \left[a_k + \sum_{r=1}^{3} a_{kr} \ln(y_r/\bar{y}_r) + \sum_{m=1}^{2} a_{km} \ln(w_m/\bar{w}_m)\right] \frac{c(y,w)}{y_k} \quad . \quad (A.4)$$

c) Approximation translogarithmique de $\dfrac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}$

$$\ln\left[\frac{dc(y,w)/dy_k}{dc(y,w)/dy_r}\right] \simeq h^s{}_{kr}(y,w) = d_0^{kr} + \sum_{i=1}^{3} d_i^{kr} \ln(y_i/\bar{y}_i)$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} d_m^{kr} \ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} d_{ij}^{kr} \ln(y_i/\bar{y}_i) \ln(y_j/\bar{y}_j)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} d_{ms}^{kr} \ln(w_m/\bar{w}_m) \ln(w_s/\bar{w}_s)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{2} d_{im}^{kr} \ln(y_i/\bar{y}_i) \ln(w_m/\bar{w}_m)$$

$$+ e_{kr} \quad , \; k,r=1, \ldots, 3, \; k\neq r, \; k<r, \quad (A.5)$$

avec $\sum_{m=1}^{2} d_m^{kr} = 0$,

$\sum_{m=1}^{2} d_{ms}^{kr} = 0$, s=1,2 ,

$\sum_{m=1}^{2} d_{im}^{kr} = 0$, i=1, ..., 3 ,

$d_{ij}^{kr} = d_{ji}^{kr}$ et $d_{ms}^{kr} = d_{sm}^{kr}$

où e_{kr} est un terme d'erreur aléatoire dû aux erreurs d'optimisation et d'approximation de moyenne nulle et de variance finie.

Les conditions locales d'existence d'un agrégat formé à partir de y_1 et y_2 s'écrivent (par 3.1):

$$\frac{dh^s_{kr}(y,w)}{dy_i} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } i=3 \ , \quad (k<r,\ k\neq r)$$

$$\frac{dh^s_{kr}(y,w)}{dw_m} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } m=1,2 \ . \quad (k<r,\ k\neq r) \qquad \text{(A.6)}$$

Ces conditions impliquent bien sûr que

$$\frac{d\ln h^s_{kr}(y,w)}{d\ln y_i} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } i=3 \quad (k<r,\ k\neq r)$$

$$\text{et} \quad \frac{d\ln h^s_{kr}(y,w)}{d\ln w_m} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } m=1,2 \ , \quad (k<r,\ k\neq r) \qquad \text{(A.7)}$$

si bien qu'en termes de l'approximation A.5, celles-ci s'écrivent:

$$d_i^{kr} + \sum_{j=1}^{3} d_{ij}^{kr} \ln(y_j/\bar{y}_j) + \sum_{m=1}^{2} d_{im}^{kr} \ln(w_m/\bar{w}_m) = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } i=3 \ , \quad (k<r,\ k\neq r)$$

$$d_m^{kr} + \sum_{s=1}^{2} d_{ms}^{kr} \ln(w_s/\bar{w}_s) + \sum_{m=1}^{3} d_{im}^{kr} \ln(y_i/\bar{y}_i) = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } m=1,2 \ . \quad (k<r,\ k\neq r) \qquad \text{(A.8)}$$

Au point $(\bar{y},\bar{w})$ les conditions A.8 deviennent:

$$d_i^{kr} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } i=3 \quad (k<r,\ k\neq r)$$

$$\text{et} \quad d_m^{kr} = 0 \ , \ k,r=1,2 \text{ et } m=1,2 \ . \quad (k<r,\ k\neq r) \qquad \text{(A.9)}$$

Les conditions locales d'existence d'un agrégat formé à partir de y_1, y_2 et y_3 ou y_1 et y_3 peuvent être facilement trouvées de la même manière.